آزمون جامع (۱)

۱. گزینهٔ «۲»

در تابع نباید مؤلفه‌های اول با هم برابر باشند و در صورتی‌که دو زوج به مؤلفه‌های اول مساوی وجود داشته باشد، باید مؤلفه‌های دوم آن‌ها هم با هم برابر باشند:

$$(1,a^2-1),(1,3)\Rightarrow a^2-1=3\Rightarrow a^2=4\Rightarrow a=\pm 2$$

$$a=2\Rightarrow f=\{(1,3),(1,3),(5,2),(b^2-3,2)\}=$$
$$\{(1,3),(5,2),(b^2-3,2)\}$$

$$a=-2\Rightarrow f=\{(1,3),(1,3)(1,2),(b^2-3,-2)\}=$$
$$\{(1,3),(1,2),(b^2-3,-2)\}$$

پس تابع نیست و فقط $a=2$ قابل قبول است و با توجه به گزینه‌ها، گزینه (۲) پاسخ صحیح است.

۲. گزینهٔ «۱»

با توجه به تابع داده‌شده باید $(x^2-1)f(x)\ge 0$ باشد، پس با توجه به نمودار $f(x)$ داریم:

x		-۲		-۱		۰		۱		۲
(x^2-1)	+		○		−		−	○	+	
f(x)	−			−	○		+		−	
		−	○		+	○	−	○	−	

پس جواب مسأله $[-1,0]\cup\{1\}$ است.

۳. گزینهٔ «۴»

می‌دانیم که $gof(x)=g(f(x))$ است، مسأله از ما مقدار $g(\frac{3}{2})$ را خواسته است، پس باید به جای $f(x)$ عدد $\frac{3}{2}$ را قرار دهیم، لذا:

$$f(x)=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{x}{2x-1}=\frac{3}{2}\Rightarrow 2x=6x-3\Rightarrow 4x=3$$
$$\Rightarrow x=\frac{3}{4}$$

لذا کافی است در رابطهٔ $gof(x)$ به جای x عدد $\frac{3}{4}$ را قرار دهیم:

$$gof(x)=\frac{x^2}{1+x^2}\Rightarrow g(f(x))=\frac{x^2}{1+x^2}\xrightarrow{x=\frac{3}{4}}$$

$$g(f(\frac{3}{4}))=\frac{(\frac{3}{4})^2}{1+(\frac{3}{4})^2}$$

$$\Rightarrow g(\frac{3}{2})=\frac{\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}}=\frac{\frac{9}{16}}{\frac{25}{16}}\longrightarrow g(\frac{3}{2})=\frac{9}{25}$$

$$\overset{(1)}{=}\frac{9\times 4}{25\times 4}=0/36$$

۴. گزینهٔ «۱»

$$D_f:\begin{cases}2\sqrt{x}-x\ge 0\Rightarrow 2\sqrt{x}\ge x\Rightarrow 4x\ge x^2\Rightarrow\\ x^2-4x\le 0\xrightarrow{\text{جدول}}0\le x\le 4\\ x\ge 0\end{cases}$$

$$D_f=[0,4]$$

$$D_g:\begin{cases}2-\sqrt{3-x}\ge 0\Rightarrow 2\ge\sqrt{3-x}\Rightarrow\\ 4\ge 3-x\Rightarrow x\ge -1\ (1)\\ 3-x\ge 0\Rightarrow x\le 3\ (2)\end{cases}$$

$$D_g=(1)\cap(2)=[-1,3]$$

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\,|\,g(x)=0\}=[0,3]$$

۵. گزینهٔ «۲»

کافی است خودمان هم تابع $fog(x)$ را تشکیل دهیم و با $fog(x)$ مسأله برابر قرار دهیم:

$$fog(x)=f(g(x))=\frac{2g-5}{3g+4}=x$$
$$\Rightarrow 2g-5=3xg+4x\Rightarrow 2g-3xg=4x+5\Rightarrow$$
$$g(2-3x)=4x+5\Rightarrow g(x)=\frac{4x+5}{2-3x}$$

۶. گزینهٔ «۳»

یادآوری:

$$\text{if }(a,b)\in fog\xrightarrow{\text{یک عددی مثل c وجود دارد که}}(a,c)\in g,(c,b)\in f$$

یعنی وقتی (a,b) در fog قرار دارد، $a\in D_g$ بوده و $b\in R_f$ است، بنابراین:

$$(8,5)\in fog\Rightarrow(8,c)\in g,(c,5)\in f$$

چون $x=8$ در دامنهٔ تابع g قرار ندارد، نتیجه می‌گیریم که b باید برابر ۸ باشد:

$$(-1,5)\in gof\Rightarrow(-1,c)\in f,(c,5)\in g$$

چون ۵ در برد تابع g قرار ندارد، نتیجه می‌گیریم که a باید برابر ۵ باشد، پس:

$$a+b=5+8=13$$

۷. گزینهٔ «۴»

$$\sqrt{\sqrt{x}-x}:\begin{cases}\sqrt{x}:x\ge 0\\ \sqrt{x}-x\ge 0\Rightarrow\sqrt{x}\ge x\Rightarrow x\ge x^2\Rightarrow x^2-x\le 0\\ \xrightarrow{\text{جدول}}0\le x\le 1\ (1)\end{cases}$$

$$[x]=0\Rightarrow 0\le x<1\xrightarrow{\text{چون در مخرج است}}x\notin[0,1)\Rightarrow$$
$$x\in(-\infty,0)\cup[1,+\infty)(2)$$
$$\Rightarrow(1)\cap(2)=\{1\}$$

۸. گزینهٔ «۴»

$$9-x^2\ge 0\Rightarrow x^2\le 9\Rightarrow -3\le x\le 3\quad(1)$$

$$[x]-2=0\Rightarrow[x]=2\Rightarrow 2\le x<3\xrightarrow{\text{در مخرج قرار دارد}}x\notin[2,3)$$
$$\Rightarrow x\in(-\infty,2)\cup[3,+\infty)\ (2)$$
$$(1)\cap(2)=[-3,2)\cup\{3\}$$

۹. گزینهٔ «۳»

چون دامنهٔ تابع به‌صورت $\mathbb{R}-\{3\}$ است، لذا متوجه می‌شویم که مخرج دارای یک ریشه بوده وآن ریشه فقط $x=3$ است. از آنجایی که مخرج یک تابع درجهٔ دو است، پس مخرج باید به‌صورت $(x-3)^2$ باشد، لذا:

$$x^2+ax+b=(x-3)^2\Rightarrow x^2+ax+b=x^2-6x+9$$
$$\xrightarrow{\text{مقایسه}}\begin{cases}a=-6\\ b=9\end{cases}\Rightarrow a+b=3$$

۱۰. گزینهٔ «۴»

$$f(x)=3^x\Rightarrow\begin{cases}f(x+2)=3^{x+2}=3^x\times 3^2=f(x)\times 9\\ f(x+1)=3^{x+1}=3^x\times 3=f(x)\times 3\end{cases}$$
$$\Rightarrow f(x+2)-2f(x+1)=9f(x)-2\times 3f(x)=3f(x)$$

آزمون جامع (۲)

۱. گزینهٔ «۴»

در مسأله گفته‌شده است که f تابعی خطی است، پس $f(x)$ را به‌صورت $ax+b$ در نظر می‌گیریم:

$$f(x)=ax+b\Rightarrow f(\frac{1}{x})=a(\frac{1}{x})+b=\frac{a}{x}+b$$

$$\Rightarrow f(x)+f(\frac{1}{x})=ax+b+\frac{a}{x}+b=\frac{ax^2+2bx+a}{x}$$

$$\xrightarrow{\times\frac{2}{2}} f(x)+f(\frac{1}{x})=\frac{2ax^2+4bx+2a}{2x}=\frac{x^2-12x+1}{2x}$$

$$\xrightarrow{\text{مقایسه}}\begin{cases}2a=1\Rightarrow a=\frac{1}{2}\\ 4b=-12\Rightarrow b=-3\end{cases}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}x-3$$

$$\Rightarrow f(-4)=\frac{1}{2}(-4)-3=-5$$

۲. گزینهٔ «۳»

با توجه به این‌که دامنهٔ تابع $y=\log(f(x))$ به صورت $f(x)>0$ به دست می‌آید و در مسأله گفته شده است $\mathbb{R}-\{b\}$ نتیجه می‌گیریم که x^2+ax+9 باید به‌صورت یک مربع کامل باشد تا همواره مثبت شود، یعنی فقط دارای یک ریشه باشد و یا به عبارت دیگر باید دلتای عبارت x^2+ax+9 برابر صفر باشد، پس:

$$\Delta=a^2-4\times1\times9=0\Rightarrow a^2=36\Rightarrow a=\pm6\Rightarrow b=\mp3$$

$$\Rightarrow a+b=\pm6\mp3=\pm3$$

۳. گزینهٔ «۴»

ابتدا ضابطه‌ی g را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$g(x)=x^2-4x+(4+1)=(x^2-4x+4)+1=(x-2)^2+1$$

$$fog(\sqrt[4]{3}+2)=f(g(\sqrt[4]{3}+2))=f((\sqrt[4]{3}+2-2)^2+1)$$

$$=f(\sqrt{3}+1)=|2-(\sqrt{3}+1)|-1=|\underbrace{1-\sqrt{3}}_{\text{منفی}}|-1$$

$$=-1+\sqrt{3}-1=\sqrt{3}-2$$

۴. گزینهٔ «۱»

ابتدا ضابطه‌ی تابع $g-1$ را تشکیل می‌دهیم:

$$g-1=\frac{1}{2x}-1=\frac{1-2x}{2x}$$

سپس تابع $\frac{f}{g-1}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{f}{g-1}=\frac{\frac{x-1}{x+1}}{\frac{1-2x}{2x}}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+1\neq0\Rightarrow x\neq-1\\ 2x\neq0\Rightarrow x\neq0\\ \frac{1-2x}{2x}\neq0\Rightarrow x\neq\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow D=\mathbb{R}-\{-1,0,\frac{1}{2}\}$$

۵. گزینهٔ «۲»

ابتدای ضابطه‌ی تابع fof را یافته و سپس تلاقی آن را با محور xها می‌یابیم:

$$f(x)=x^2-1\Rightarrow fof(x)=f(f(x))=f(x^2-1)=(x^2-1)^2-1$$

$$\xrightarrow[y=0]{\text{تلاقی با xها}} fof(x)=0\Rightarrow(x^2-1)^2-1=0\Rightarrow(x^2-1)^2=1$$

$$\Rightarrow x^2-1=\pm1\Rightarrow\begin{cases}x^2-1=1\Rightarrow x^2=2\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}\\ x^2-1=-1\Rightarrow x^2=0\Rightarrow x=0\end{cases}$$

چون ریشه‌های $\pm\sqrt{2}$ ساده هستند نمودار تابع محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند و چون $x=0$ ریشهٔ مضاعف است، نمودار تابع در $x=0$ بر محور xها مماس می‌شود. پس دو نقطهٔ تلاقی و یک نقطهٔ تماس داریم.

۶. گزینهٔ «۲»

$$D_{f(x)}=[-6,2]\xrightarrow{\text{یعنی}}-6\leq x\leq2$$

برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع $f(\frac{x}{2})$ کافی است به جای x، $\frac{x}{2}$ را جایگزین نماییم، پس:

$$-6\leq\frac{x}{2}\leq2\Rightarrow-12\leq x\leq4$$

۷. گزینهٔ «۳»

$$\begin{cases}x^2+2x\geq0\ (1)\\ \frac{-1}{x^2+2x}\geq0\xrightarrow{\times(-1)}\frac{1}{x^2+2x}\leq0\Rightarrow x^2+2x<0\ (2)\end{cases}$$

$$\Rightarrow(1)\cap(2)=\varnothing$$

۸. گزینهٔ «۲»

$$f(x)=\sqrt[3]{x+1}\Rightarrow f(7)=\sqrt[3]{8}=2$$

$$g(x)=x^2+6\Rightarrow\begin{cases}g(1)=7\\ g(7)=49+6=55\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{fog(1)}{(f+g)(7)}=\frac{f(g(1))}{f(7)+g(7)}=\frac{f(7)}{f(7)+g(7)}=\frac{2}{2+55}=\frac{2}{57}$$

۹. گزینهٔ «۲»

$$f(0)=0-1=-1$$

$$\Rightarrow(f+2g)(-1)=f(-1)+2g(-1)=(-1-1)+2(-1)=-4$$

۱۰. گزینهٔ «۴»

$$\sqrt{4-\sqrt{1-2x}}:4-\sqrt{1-2x}\geq0\Rightarrow4\geq\sqrt{1-2x}\Rightarrow16\geq1-2x$$

$$\Rightarrow2x\geq-15\Rightarrow x\geq-\frac{15}{2}\ (1)$$

$$\sqrt{1-2x}:1-2x\geq0\Rightarrow1\geq2x\Rightarrow x\leq\frac{1}{2}\ (2)$$

$$\xrightarrow{(1)\cap(2)}-\frac{15}{2}\leq x\leq\frac{1}{2}\xrightarrow{\text{اعداد صحیح}}\{-7,-6,\dots,0\}$$

$$\Rightarrow\text{تعداد}=8$$